

一类随机模型下 DC 养老金的最优投资策略*

邓丽梅, 谷爱玲, 伊博
(广东工业大学应用数学学院, 广东 广州 510520)

摘要: 研究了 DC 型养老金计划参与者的最优投资策略, 其中金融市场由一个无风险资产和一个风险资产组成, 风险的市场价格由仿射平方根随机模型描述。利用随机控制理论, 通过求解相应的 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程, 得到 CRRA 效用下最优值函数和最优投资策略的解析式。最后, 通过数值算例, 阐述了风险资产的随机因子和漂移率对最优投资策略的影响, 并发现当市场往良性状态发展时, 投资在风险资产的财富比例将不断增大; 但在相同的市场状态下, 当初始财富足够大时, 投资在风险资产的财富比例几乎与投资期限无关。

关键词: DC 型养老金计划; 最优投资策略; 仿射平方根随机模型; Hamilton-Jacobi-Bellman 方程

中图分类号: O224 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2020) 05-0019-10

Optimal investment strategy under a stochastic model for DC pension

DENG Limei, GU Ailing, YI Bo

(School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China)

Abstract: The optimal investment strategy of the participants in the DC pension plan is studied. The financial market consists of a risk-free asset and a risky asset, and the market price of risk depends on affine-form square-root stochastic model. By using the stochastic control theory and solving the corresponding Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation, the analytic expressions of the optimal value function and the optimal investment strategy under the CRRA utility are obtained. Finally, through numerical examples, the impact of stochastic factor and appreciation rate of the risky asset on the optimal investment strategy are explained, and it is found that the wealth proportion invested in the risky asset will continue to increase when the market state is developing to a positive state; but in the same market state, the optimal investment proportion is almost not affected by the investment period when the initial wealth is large enough.

Key words: DC pension plan; optimal investment strategy; affine-form square-root stochastic model; Hamilton-Jacobi-Bellman equation

随着人口老龄化的加剧, 养老问题成为社会关注的焦点, 从而养老金的管理问题成为诸多学者的关注点。目前, 广泛被采用的养老金计划有两种形式: 收益确定型养老金计划 (简称 DB 型养老金计划) 和缴费确定型养老金计划 (简称 DC 型养老金计划)。在 DB 型养老金计划中, 养老金的支付是预先确定的, 计划发起人与计划参与者都要承诺基于确定的收益支付养老金。在 DC 型养老金计划中, 缴费率是固定的, 支付额的多少取决于养老金的投资回报。随着金融市场的不断完善和保险公司的风险管理能力提高, DC 型养老金计划受到人们的青睐, 并逐渐在养老基金管理中流行起来。

* 收稿日期: 2019-10-10

基金项目: 国家自然科学基金 (11701101)

作者简介: 邓丽梅 (1993 年生), 女; 研究方向: 运筹与控制 in 金融中的应用; E-mail: 2992075099@qq.com

通信作者: 谷爱玲 (1976 年生), 女; 研究方向: 运筹与控制 in 金融中的应用; E-mail: 94498141@qq.com

与 DB 型养老金计划相比, DC 型养老金计划的主要优势在于参与者的收益依赖养老金的投资收益, 发挥计划参与者的积极主动性。目前, 许多学者对不同环境下 DC 型养老金计划的投资问题进行研究, 并取得许多成果。Vigna 和 Haberman^[1] 先考虑了离散时间下 DC 型养老金计划的投资问题, 并运用随机控制理论得到养老金的最优投资策略, 然后 Haberman 和 Vigna^[2] 推导出一个 DC 型养老金计划的最优投资分配公式, 而且该养老金计划的基金投资于多种风险资产。Devolder 等^[3] 利用不同种类的效用函数, 研究了 DC 型养老金计划中参与者退休前和退休后的最优投资策略。在 DC 型养老金计划投资问题的研究中, 期望效用准则和均值方差准则被广泛应用。对于期望效用准则, 常相对风险厌恶的效用函数 (CRRA)、常绝对风险厌恶的效用函数 (CARA) 和二次损失函数是常用的三种效用函数。Gao^[4] 利用 Legendre 变换和对偶理论将原问题转化为对偶问题, 并尝试在对数效用函数下求出最优投资策略的显式解; 张初兵和荣喜民^[5] 在 Gao^[4] 市场模型基础上, 利用幂效用和指数效用进一步研究了 DC 型养老金计划的最优投资问题; 高建伟和乌云高^[6] 在不确定理论的框架下, 以最小化二次损失函数为目标, 建立养老金计划的最优模型, 并给出了 DC 型养老金计划的最优投资策略; He 和 Liang^[7] 采用均方差准则, 研究了 DC 型养老金计划的最优投资策略。以上文献中, 多数文献假设风险资产的价格过程遵循 Geometric Brownian Motion (GBM) 模型, 且风险资产的价格波动是常数。然而, 风险资产的价格在现实中的波动性是随时间而变化的, 从而, Stochastic Volatility 模型 (简称 SV 模型) 能更好地刻画风险资产的价格过程。Cox 和 Ross^[8] 在 1976 年提出的 Constant Elasticity of Variance (CEV) 模型开创了 SV 市场研究的先河, 至今仍受到学术界的广泛关注。目前, Zeng 和 Taksar^[9] 对一般的随机波动模型进行了分析, 以最大化终端财富期望效用为目标, 得到了最大化问题的显式候选解; Chacko 和 Viceira^[10] 研究了长期投资者的最优消费和投资组合问题, 其中风险资产的价格过程服从 SV 模型; 在无限时间范围内, Noh 和 Kim^[11] 研究了随机波动率和随机利率下的投资组合优化问题。

据我们所知, 在许多随机波动模型的研究中, 主要采用 CEV 模型或 Heston 模型。林祥和杨益非^[12] 在风险资产的方差服从 Heston 随机模型下, 研究了缴费确定型养老金计划的最优投资问题; Xiao 等^[13] 假设风险资产的价格由 CEV 模型描述, 研究了指数效用函数下 DC 型养老金计划的最优投资策略; Gao^[14] 应用 CEV 模型描述风险资产的价格过程, 在 CRRA 和 CARA 效用函数下得到 DC 型养老金的最优投资策略; 张初兵等^[15] 研究了 Heston 模型下缴费确定型养老金计划的最优投资问题; 但很少有文献考虑更一般的 SV 模型。因此, 本文以现有文献为基础, 在较为一般的随机波动模型下, 研究 DC 型养老金计划的最优投资策略。文中假设金融市场包含一种无风险资产和一种风险资产, 其中风险的市场价格服从仿射平方根随机模型, 同时以最大化 DC 型养老金终端财富的 CRRA 效用为目标, 利用随机控制理论, 通过求解相应的 HJB 方程得到最优值函数和最优投资策略的解析式, 最后分析了金融市场中的随机因子和风险资产的漂移率对最优投资策略的影响。

1 模型建立与求解

设 $(\Omega, \mathcal{F}, \{F_t\}_{t \in [0, T]}, P)$ 为赋流完备的概率空间, 其中 T 为有限正数, 代表 DC 型养老金计划参与者的投资时间, 即投资期限; F_t 表示到时刻 t 时的市场信息总和; 时刻 t 的决策取决于信息流 F_t 。下文中, 我们假设所有随机过程都是此赋流概率空间上的适应过程。

假设 DC 型养老金计划参与者可投资于一种无风险资产和一种风险资产。无风险资产的价格过程 $\{P_0(t)\}_{t \in [0, T]}$ 满足微分方程

$$dP_0(t) = r(t)P_0(t)dt, P_0(0) = 1 \quad (1)$$

其中 $r(t) > 0$ 为 t 时刻无风险的利率, 且假设 $r(\cdot): [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^+$ 是一个确定性的一致有界函数。风险资产的价格过程 $\{S(t)\}_{t \in [0, T]}$ 满足随机微分方程

$$dS(t) = S(t) [\mu(t)dt + \sigma(t)dW_1(t)], S(0) = s_0 > 0 \quad (2)$$

其中 $\mu(t)$ 为 t 时刻风险资产的漂移率, $\sigma(t) > 0$ 为 t 时刻风险资产的波动率。 $\{W_1(t)\}_{t \geq 0}$ 是一维标准布朗运

动。这里我们假设 $\{\mu(t)\}_{t \in [0, T]}$ 和 $\{\sigma(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是 F_t 可预测的过程, 它们是有界的马尔可夫随机过程。

在 Shen 和 Zeng^[16] 的启发下, 本文将风险的市场价格表示为

$$\vartheta(t) = \frac{\mu(t) - r(t)}{\sigma(t)}, \forall t \in [0, T] \quad (3)$$

假设风险的市场价格过程 $\{\vartheta(t)\}_{t \in [0, T]}$ 与随机因子过程 $\{\alpha(t)\}_{t \in [0, T]}$ 有如下关系

$$\vartheta(t) = \theta \sqrt{\alpha(t)}, \forall t \in [0, T], \theta \in \mathbf{R}_0 := \mathbf{R} \setminus \{0\} \quad (4)$$

由于 (3) 式与 (4) 式相等, 则随机因子过程 $\{\alpha(t)\}_{t \in [0, T]}$ 与过程 $\{\mu(t)\}_{t \in [0, T]}$ 的函数形式为

$$\mu(t) = \theta \sigma(t) \sqrt{\alpha(t)} + r(t)$$

这里的随机因子过程 $\{\alpha(t)\}_{t \in [0, T]}$ 满足以下仿射平方根模型

$$d\alpha(t) = k(\phi - \alpha(t))dt + \sqrt{\alpha(t)} dW(t), \alpha(0) = \alpha_0 \geq 0 \quad (5)$$

其中 $k, \phi \in \mathbf{R}^+$, 且满足条件 $2k\phi \geq 1$, 该条件可确保对于任意的 $t \in [0, T]$, 恒有 $\alpha(t) > 0$ 。在平方根模型 (5) 中, 参数 k 表示风险资产中随机因子回复到均值的速度, ϕ 表示风险资产中随机因子的均值回复水平; $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 是一维标准布朗运动, 且 $\{W_1(t)\}_{t \geq 0}$ 与 $\{W(t)\}_{t \geq 0}$ 的相关系数为 ρ , 即

$$\langle dW_1(t), dW(t) \rangle = \rho dt$$

在谢树香和李仲飞^[17] 的启发下, 则存在一个标准布朗运动 $\{W_2(t)\}_{t \geq 0}$, 使得

$$dW(t) = \rho dW_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} dW_2(t)$$

其中 $\{W_1(t)\}_{t \geq 0}$ 与 $\{W_2(t)\}_{t \geq 0}$ 相互独立。

值得一提的是, 我们的模型框架包括了一些著名的马尔可夫模型, 如 CEV 模型、GBM 模型和 Heston 模型 (参见注 1~3)。

下面我们考虑 DC 型养老金计划, 计划参与者在退休前每年要缴纳固定金额到养老金账户中。假设计划参与者每年工资为 W , 则每年需要缴纳的金额为 cW , 缴费率 c 是常数, 而且把缴纳的金额全部存到一个固定的账户。记参与者在 $t \in [0, T]$ 时刻的账户收入为 $X(t)$ (为了研究方便, 我们假设工资 $W = 1$), 则 $X(t)$ 满足以下微分方程

$$dX(t) = cdt, \quad X(0) = x_0$$

其中 x_0 表示 0 时刻账户里的金额。假设 t 时刻投资在风险资产上的财富比例为 $\pi(t)$, 则投资在无风险资产上的财富比例为 $1 - \pi(t)$, 从而在策略 π 下的养老金账户总额 $X^\pi(t)$ 的动态过程表示为

$$\begin{aligned} dX^\pi(t) &= cdt + (1 - \pi(t))X^\pi(t) \frac{dP_0(t)}{P_0(t)} + \pi(t)X^\pi(t) \frac{dS(t)}{S(t)} \\ &= [c + (1 - \pi(t))X^\pi(t)r(t)]dt + \pi(t)X^\pi(t) (\mu(t)dt + \sigma(t)dW_1(t)) \\ &= [c + X^\pi(t)r(t) + \pi(t)X^\pi(t) (\mu(t) - r(t))]dt + \pi(t)X^\pi(t) \frac{\mu(t) - r(t)}{\theta \sqrt{\alpha(t)}} dW_1(t) \end{aligned} \quad (6)$$

定义 1 如果 $\{\pi(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是循序可测的, 且 $E(\int_0^\infty \pi^2(t)dt) < \infty$ 及上式 (6) 有唯一强解, 则称投资策略 $\pi := \{\pi(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是一个允许策略。

记 Π 为所有允许策略组成的集合。假设效用函数 U 是递增的凹函数。对任意允许策略 $\pi \in \Pi$, 我们定义从初始时刻 t 和初始状态 (x, α) 出发的值函数为

$$V_\pi(t, x, \alpha) = E[U(X^\pi(T)) | X^\pi(t) = x, \alpha(t) = \alpha]$$

下面寻找最优值函数

$$V(t, x, \alpha) = \sup_{\pi \in \Pi} V_\pi(t, x, \alpha) \quad (7)$$

及相应的最优投资策略 π^* , 使得 $V_{\pi^*}(t, x, \alpha) = V(t, x, \alpha)$, 即 DC 型养老金计划参与者在退休时账户里全部

资金的期望效用最大。显然, 最优值函数满足边界条件

$$V(T, x, \alpha) = U(x)$$

假定采用 CRRA 效用函数, 即

$$U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}, 0 < \gamma < 1$$

其中 $1 - \gamma$ 为相对风险厌恶系数。利用随机控制理论, 我们得出优化问题 (7) 对应的 HJB 方程为

$$\sup_{\pi \in \Pi} \{A^\pi V(t, x, \alpha)\} = 0 \quad (8)$$

其中

$$\begin{aligned} A^\pi V(t, x, \alpha) = & V_t + V_x [c + xr(t) + x\pi(t)(\mu(t) - r(t))] + \frac{1}{2} V_{xx} \left[x^2 \pi^2(t) \frac{(\mu(t) - r(t))^2}{\theta^2 \alpha} \right] \\ & + V_\alpha k(\phi - \alpha) + \frac{1}{2} V_{\alpha\alpha} \alpha + V_{x\alpha} \frac{\rho x \pi(t)(\mu(t) - r(t))}{\theta} \end{aligned}$$

以及边界条件

$$V(T, x, \alpha) = \frac{x^\gamma}{\gamma} \quad (9)$$

其中 $V_t, V_x, V_\alpha, V_{xx}, V_{\alpha\alpha}, V_{x\alpha}$ 是 $V(t, x, \alpha)$ 关于 t, x, α 的一阶和二阶偏导数。

定理 1 (验证定理) 若 $G(t, x, \alpha) \in C^{1,2,2}([0, T] \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+)$ 且满足方程 (8) 及边界条件 (9), 则 $G(t, x, \alpha) \geq V(t, x, \alpha)$; 如果存在允许策略 π^* , 使得 $\forall t \in [0, T]$ 有

$$\pi^*(t) \in \arg \sup_{\pi \in \Pi} A^\pi G(t, x, \alpha)$$

则 $\forall t \in [0, T]$ 有 $G(t, x, \alpha) = V(t, x, \alpha)$, 且 π^* 是最优投资策略。

证明 因为 $G(t, x, \alpha) \in C^{1,2,2}([0, T] \times \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+)$, 所以由 Itô 引理得

$$\begin{aligned} G(T, X^\pi(T), \alpha(T)) = & G(t, x, \alpha) + \int_t^T A^\pi G(\tau, X^\pi(\tau), \alpha(\tau)) d\tau + \int_t^T \pi(\tau) X^\pi(\tau) \frac{\mu(\tau) - r(\tau)}{\theta \sqrt{\alpha(\tau)}} G_x(\tau, X^\pi(\tau), \alpha(\tau)) dW_1(\tau) \\ & + \int_t^T \rho \sqrt{\alpha(\tau)} G_\alpha(\tau, X^\pi(\tau), \alpha(\tau)) dW_1(\tau) + \int_t^T \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\alpha(\tau)} G_\alpha(\tau, X^\pi(\tau), \alpha(\tau)) dW_2(\tau) \end{aligned}$$

由 (8) 式得

$$\begin{aligned} G(T, X^\pi(T), \alpha(T)) \leq & G(t, x, \alpha) + \int_t^T \pi(\tau) X^\pi(\tau) \frac{\mu(\tau) - r(\tau)}{\theta \sqrt{\alpha(\tau)}} G_x(\tau, X^\pi(\tau), \alpha(\tau)) dW_1(\tau) \\ & + \int_t^T \rho \sqrt{\alpha(\tau)} G_\alpha(\tau, X^\pi(\tau), \alpha(\tau)) dW_1(\tau) \\ & + \int_t^T \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\alpha(\tau)} G_\alpha(\tau, X^\pi(\tau), \alpha(\tau)) dW_2(\tau) \end{aligned}$$

由于上式的最后三项为平方可积鞅且期望为零, 故

$$E[G(T, X^\pi(T), \alpha(T)) | X^\pi(t) = x, \alpha(t) = \alpha] \leq G(t, x, \alpha)$$

在所有允许策略 $\pi \in \Pi$ 中, 将上式两端取上确界得

$$V(t, x, \alpha) \leq G(t, x, \alpha)$$

若 $\pi = \pi^*$, 有 $V(t, x, \alpha) = G(t, x, \alpha)$, 则 π^* 是优化问题 (7) 的最优投资策略。证毕。

根据定理 1 可知, 求解优化问题 (7) 就转化为求解 HJB 方程 (8)。我们猜想最优值函数 $V(t, x, \alpha)$ 具有如下形式:

$$V(t, x, \alpha) = \frac{(x - b(t))^\gamma}{\gamma} f(t, \alpha) > 0 \quad (10)$$

且满足边界条件 $f(T, \alpha) = 1, b(T) = 0$, 由 (10) 式可得如下偏导数:

$$V_t = \left[(x - b(t)) \frac{f_t}{\gamma} - b_t f \right] (x - b(t))^{\gamma-1}, \quad V_x = (x - b(t))^{\gamma-1} f, \quad V_\alpha = (x - b(t))^{\gamma} \frac{f_\alpha}{\gamma}, \quad (11)$$

$$V_{xx} = (\gamma - 1) (x - b(t))^{\gamma-2} f, \quad V_{\alpha\alpha} = (x - b(t))^{\gamma} \frac{f_{\alpha\alpha}}{\gamma}, \quad V_{\alpha x} = (x - b(t))^{\gamma-1} f_\alpha$$

其中 $f = f(t, \alpha)$, f 关于 α 的二阶偏导数为 $f_{\alpha\alpha}$, f 关于 t 和 α 的一阶偏导数分别为 f_t 与 f_α 。由 (10) 式及 $0 < \gamma < 1$, 得到 $V_{xx} < 0$ 。将 HJB 方程 (8) 中的 $A^\pi V(t, x, \alpha)$ 关于 π 求导, 于是得到 (8) 式最值点为

$$\pi^*(t) = -\frac{\theta^2 \alpha V_x + \theta \alpha \rho V_{\alpha\alpha}}{x[\mu(t) - r(t)] V_{xx}} \quad (12)$$

将 (11) 式与 (12) 式代入 (8) 式整理得

$$(x - b(t)) \left[r(t) f + \frac{1}{\gamma} \left(f_t + f_\alpha k (\phi - \alpha) + \frac{1}{2} f_{\alpha\alpha} \alpha \right) + \frac{\alpha (\theta f + \rho f_\alpha)^2}{2f(1-\gamma)} \right] + (r(t)b(t) + c - b_t) f = 0 \quad (13)$$

令 (13) 式中 $x - b(t)$ 的系数及常数项均为零, 得到下列微分方程

$$b_t - r(t)b(t) - c = 0, \quad b(T) = 0 \quad (14)$$

$$r(t) f + \frac{1}{\gamma} \left[f_t + f_\alpha k (\phi - \alpha) + \frac{1}{2} f_{\alpha\alpha} \alpha \right] + \frac{\alpha (\theta f + \rho f_\alpha)^2}{2f(1-\gamma)} = 0, \quad (15)$$

$$f(T, \alpha) = 1$$

求解一阶线性微分方程 (14) 得

$$b(t) = -c \left[\int_t^T \exp\left(\int_t^v -r(v) dv\right) dz \right] \exp\left(\int_t^T -r(\tau) d\tau\right) \quad (16)$$

当 $r(t) = r$ 时, 解得 $b(t) = -\frac{c(1 - e^{-r(T-t)})}{r}$ 。

引理 1 假设偏微分方程 (15) 解的结构为 $f = f(t, \alpha) = \exp(g(t) + z(t)\alpha)$, 且满足边界条件 $g(T) = 0$, $z(T) = 0$, 则有

$$z(t) = \frac{2(1-\gamma)}{1-\gamma+\gamma\rho^2} \overline{z(t)} \quad (17)$$

$$\overline{z(t)} = \begin{cases} \frac{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)(T-t)} - 1}{e^{(\lambda_1 - \lambda_2)(T-t)} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \lambda_2, & \Delta > 0, \quad \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1, \quad T < \frac{\ln \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|}{\sqrt{\Delta}}, \\ \frac{\lambda_3^2 (T-t)}{\lambda_3 (T-t) + 1}, & \Delta = 0, \quad T < \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma\theta\rho}{1-\gamma} - k \right), \\ \frac{\lambda_3^2 + \frac{\Delta^2}{4}}{\lambda_3 + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \cot \frac{(T-t)\sqrt{-\Delta}}{2}}, & \Delta < 0, \quad T < \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \arctan \frac{-2\lambda_3}{\sqrt{-\Delta}}, \end{cases}$$

$$g(t) = k\phi \int_t^T z(v) dv + \gamma \int_t^T r(v) dv \quad (18)$$

其中

$$\Delta = \left(\frac{\gamma\theta\rho}{1-\gamma} - k \right)^2 - 4 \cdot \frac{\gamma\theta^2}{2(1-\gamma)} \left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma\rho^2}{2(1-\gamma)} \right] = k^2 - \frac{\gamma\theta(2\rho k + \theta)}{1-\gamma},$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left(k - \frac{\gamma\theta\rho}{1-\gamma} + \sqrt{\Delta} \right), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(k - \frac{\gamma\theta\rho}{1-\gamma} - \sqrt{\Delta} \right), \quad \lambda_3 = \frac{1}{2} \left(k - \frac{\gamma\theta\rho}{1-\gamma} \right)$$

此时, 若 $r(t) = r$, 则 $g(t) = k\phi \int_t^T z(v) dv + r\gamma(T-t)$ 。

证明 已知 $f = f(t, \alpha) = \exp(g(t) + z(t)\alpha)$, 且满足边界条件 $g(T) = 0$, $z(T) = 0$, 则容易得到如下偏

导数

$$f_t = [g'(t) + \alpha z'(t)]f, f_\alpha = z(t)f, f_{\alpha\alpha} = z^2(t)f$$

将上述偏导数代入(15)式得到

$$L_1(t)\alpha + L_2(t) = 0$$

其中

$$L_1(t) = z'(t) - z(t)k + \frac{1}{2}z^2(t) + \frac{\gamma(\theta + \rho z(t))^2}{2(1-\gamma)},$$

$$L_2(t) = r(t)\gamma + g'(t) + z(t)k\phi$$

要使 $L_1(t)\alpha + L_2(t) = 0$ 恒成立, 只需令该式中 α 的系数及常数项为零, 即 $L_1(t), L_2(t)$ 恒等于 0, 化简得

$$z'(t) + \left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma\rho^2}{2(1-\gamma)} \right] z^2(t) + \left(\frac{\gamma\theta\rho}{1-\gamma} - k \right) z(t) + \frac{\gamma\theta^2}{2(1-\gamma)} = 0 \quad (19)$$

$$g'(t) + z(t)k\phi + r(t)\gamma = 0 \quad (20)$$

为了表述方便, 我们把(19)式记为

$$z'(t) = q_0 + q_1 z(t) + q_2 z^2(t)$$

其中 $q_0 = -\frac{\gamma\theta^2}{2(1-\gamma)}, q_1 = -\left(\frac{\gamma\theta\rho}{1-\gamma} - k\right), q_2 = -\left[\frac{1}{2} + \frac{\gamma\rho^2}{2(1-\gamma)}\right]$ 。由于(19)式是一般的 Riccati 方程, 则有

(i) 当 $\Delta > 0$ 时, $y = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ 且 $z = -\frac{1}{q_2} \frac{y'}{y}$, 又 $z(T) = 0$, 解得

$$z(t) = \frac{2(1-\gamma)}{1-\gamma + \gamma\rho^2} \frac{\exp((\lambda_1 - \lambda_2)(T-t)) - 1}{\exp((\lambda_1 - \lambda_2)(T-t)) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \lambda_2$$

(ii) 当 $\Delta = 0$ 时, $y = (c_1 + c_2 t) e^{\lambda_3 t}$ 且 $z = -\frac{1}{q_2} \frac{y'}{y}$, 又 $z(T) = 0$, 解得

$$z(t) = \frac{2(1-\gamma)}{1-\gamma + \gamma\rho^2} \frac{\lambda_3^2 (T-t)}{\lambda_3 (T-t) + 1}$$

(iii) 当 $\Delta < 0$ 时, $y = e^{\lambda_3 t} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t + c_2 \sin \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} t \right)$ 且 $z = -\frac{1}{q_2} \frac{y'}{y}$, 又 $z(T) = 0$, 解得

$$z(t) = \frac{2(1-\gamma)}{1-\gamma + \gamma\rho^2} \frac{\lambda_3^2 + \frac{\Delta^2}{4}}{\lambda_3 + \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \cot \frac{(T-t)\sqrt{-\Delta}}{2}}$$

综上可解得 $z(t)$ 的解析式为(17)式, 将(17)式代入(20)式可得 $g(t)$ 的表达式为(18)式。证毕。

根据(11)式和引理1, 有

$$\frac{V_x}{V_{xx}} = \frac{x - b(t)}{\gamma - 1}, \quad \frac{V_{x\alpha}}{V_{xx}} = \frac{z(t)(x - b(t))}{\gamma - 1}$$

将上式代入(12)式, 由定理1可得优化问题(7)的最优投资策略为

$$\pi^*(t) = \frac{\theta\sqrt{\alpha(t)}(x - b(t))}{\sigma(t)(1-\gamma)x} \left(1 + \frac{\rho z(t)}{\theta} \right) \quad \text{或} \quad \pi^*(t) = \frac{[\mu(t) - r(t)](x - b(t))}{\sigma^2(t)(1-\gamma)x} \left(1 + \frac{\rho z(t)}{\theta} \right)$$

定理2 在效用函数 $U(x) = \frac{x^\gamma}{\gamma}$ 下, 优化问题(7)的最优值函数为

$$V(t, x, \alpha) = \frac{(x - b(t))^\gamma}{\gamma} \exp(g(t) + z(t)\alpha) \quad (21)$$

对应的最优投资策略为

$$\pi^*(t) = \frac{\theta\sqrt{\alpha(t)}(x-b(t))}{\sigma(t)(1-\gamma)x} \left(1 + \frac{\rho z(t)}{\theta}\right) \quad (22)$$

或

$$\pi^*(t) = \frac{(\mu(t)-r(t))(x-b(t))}{\sigma^2(t)(1-\gamma)x} \left(1 + \frac{\rho z(t)}{\theta}\right) \quad (23)$$

其中 $b(t)$, $z(t)$, $g(t)$ 分别由 (16) - (18) 式给出。

注1 (CEV模型) 若 $\mu(t) = \mu$, $\sigma(t) = \sigma S^\beta(t)$, $r(t) = r$ 其中 $\mu > 0$, $r > 0$, $\sigma > 0$, $\beta \in \mathbf{R}$, $\mu > r$, 此时风险资产的价格过程由 CEV 模型给出:

$$dS(t) = S(t) [\mu dt + \sigma S^\beta(t) dW_1(t)], S(0) = s_0 > 0$$

其中 β 为风险资产的弹性参数。应用 Itô 公式, 得

$$dS^{-2\beta}(t) = 2\beta\mu \left[\left(\beta + \frac{1}{2}\right) \frac{\sigma^2}{\mu} - S^{-2\beta}(t) \right] dt - 2\beta\sigma S^{-\beta}(t) dW_1(t)$$

若设 $\alpha(t) = S^{-2\beta}(t)$, 则有 $k = 2\beta\mu$, $\phi = \left(\beta + \frac{1}{2}\right) \frac{\sigma^2}{\mu}$, $\rho = -2\beta\sigma$, $\sqrt{1-\rho^2} = 0$, $\theta = \frac{\mu-r}{\sigma}$, 风险的市场价格为 $\vartheta(t) = \frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)} = \frac{\mu-r}{\sigma S^\beta(t)}$ 。这里, 我们把最优值函数定义为

$$V(t, x, s) = \sup_{\pi \in \Pi} E[U(X^\pi(T)) | X^\pi(t) = x, S(t) = s]$$

解得相应的最优投资策略为

$$\pi^*(t) = \frac{(\mu-r-2\beta\sigma^2 z(t))(x-b_1(t))}{\sigma^2 S^{2\beta}(t)(1-\gamma)x}$$

其中 $b_1(t) = -\frac{c(1-e^{-r(T-t)})}{r}$, 且 $z(t)$ 由 (17) 式给出, 此时的最优投资策略是文献 [18] 部分结论的推广。

注2 (GBM模型) 在注1的前提下, 若 $\beta = 0$, CEV 模型就退化为 GBM 模型, 这时最优投资策略为

$$\pi^*(t) = \frac{(\mu-r)(x-b_1(t))}{\sigma^2(1-\gamma)x}$$

注3 (Heston模型) 若 $r(t) = r$, $\mu(t) = r + \theta\alpha(t)$, $\sigma(t) = \sqrt{\alpha(t)}$, $\rho = \sigma_0\rho'$, $\sqrt{1-\rho^2} = \sigma_0\sqrt{1-\rho'^2}$, 其中 $r > 0$, $\sigma_0 > 0$, $\rho' \in (-1, 1)$ 及 $\theta \in \mathbf{R}_0 := \mathbf{R} \setminus \{0\}$, 此时风险资产的价格过程由 Heston 模型给出:

$$dS(t) = S(t) [(r + \theta\alpha(t))dt + \sqrt{\alpha(t)} dW_1(t)], S(0) = s_0 > 0$$

且有微分方程

$$d\alpha(t) = k[\phi - \alpha(t)]dt + \sigma_0\sqrt{\alpha(t)}[\rho'dW_1(t) + \sqrt{1-\rho'^2}dW_2(t)], \alpha(0) = \alpha_0 \geq 0$$

这里的方差过程 $\{\alpha(t)\}_{t \in [0, T]}$ 是随机因子过程, $k > 0$ 表示均值回复速度, $\phi > 0$ 表示均值回复水平, σ_0 是方差 $\alpha(t)$ 的波动率, ρ' 是风险资产的价格和方差 $\alpha(t)$ 之间的相关系数。此时, $2k\phi \geq \sigma_0^2$, 而且任意 $t \in [0, T]$, 有 $\alpha(t) > 0$ 。特别地, 在 Heston 模型中, 风险的市场价格表示为 $\vartheta(t) = \theta\sqrt{\alpha(t)}$ 。因此, 我们解得优化问题 (7) 的最优投资策略为

$$\pi^*(t) = \frac{(\theta + \sigma_0\rho'z(t))(x-b_1(t))}{(1-\gamma)x}$$

此时的最优投资策略和文献 [15] 有一部分结果相同, 因此本文推广了文献 [15] 的部分结论。

2 敏感分析

本节主要从金融市场的随机因子 $\alpha(t)$ 和风险资产的漂移率 $\mu(t)$ 入手, 以 $\rho = 0$ 为特例, 具体分析模型中各参数对最优投资策略的影响。为了节省篇幅, 我们只考虑 $\Delta > 0$ 的情况, $\Delta < 0$ 与 $\Delta = 0$ 的情况可做类似讨论。这里我们假设 $r(t)$ 和 $\sigma(t)$ 为常数, 即 $r(t) = r$, $\sigma(t) = \sigma$ 。为了研究方便, 在没有特殊指明的情况

下, 参数的基本值为 $r = 0.03$, $\theta = 0.2$, $\sigma = 0.21$, $\gamma = 0.5$, $x = 1$, $t = 5$, $T = 20$ 。

首先, 我们分析参数 α 、 θ 以及 σ 对最优投资策略的影响。将 (22) 式关于 $\alpha(t)$ 求导得:

$$\frac{\partial \pi^*(t)}{\partial \alpha(t)} = \frac{\theta(x - b(t))}{2\sigma(t)\sqrt{\alpha(t)}(1 - \gamma)x} > 0 \quad (24)$$

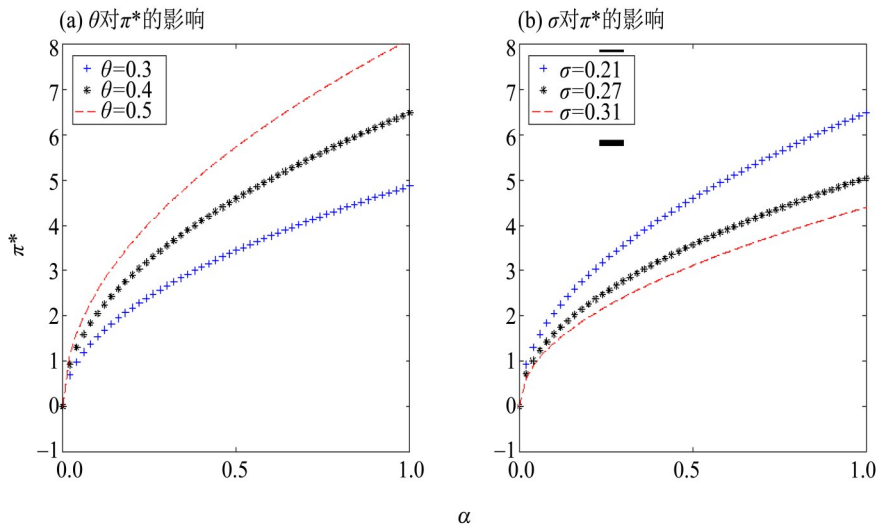


图1 随着 α 的变化, 参数 θ 和 σ 对最优投资策略 π^* 的影响

Fig. 1 The impact of α , θ and σ on the optimal investment strategy π^*

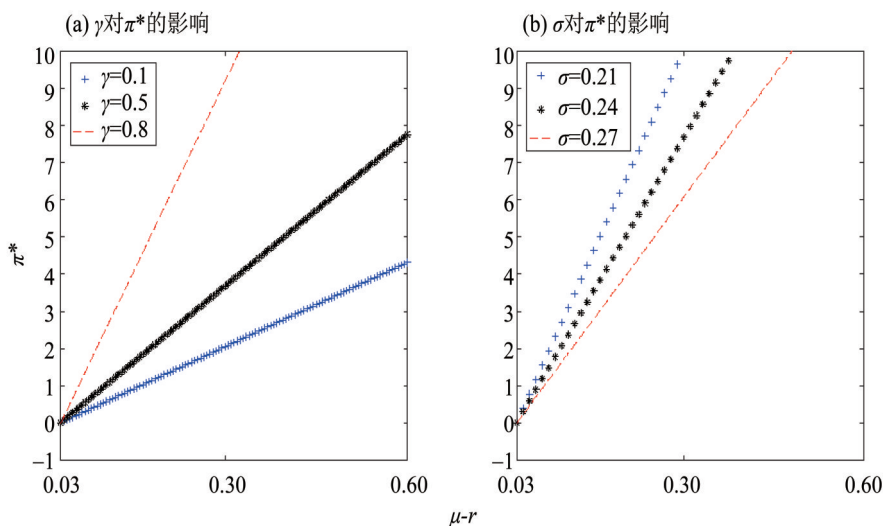
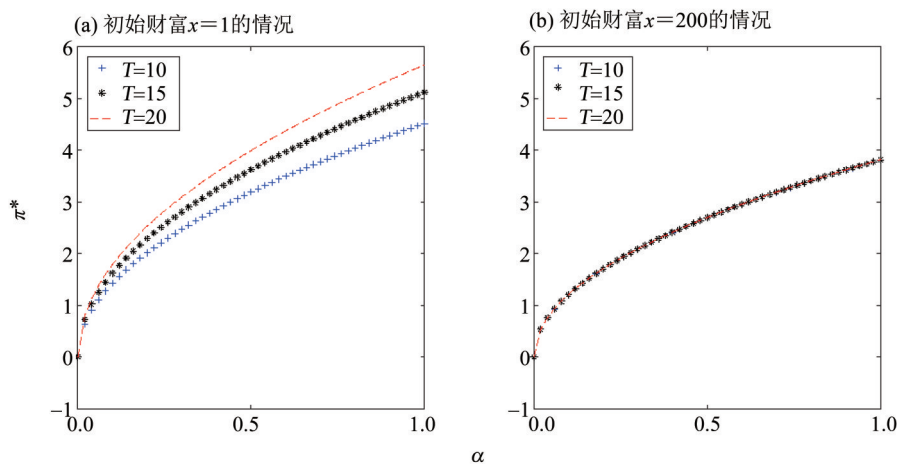
(24) 式表明投资策略关于 $\alpha(t)$ 单调递增。正如图 1 所示, 投资策略 π^* 随着 $\alpha(t)$ 的增大而增大, 这表明市场状态向良性发展, 投资者会加大对风险资产的投资。从图 1 可以看出, π^* 随着 θ 的增大而增大, 但随着 σ 的增大而减少。由 (4) 式可知, 当参数 θ 越大时, 风险的市场价格 $\vartheta(t)$ 随之递增, 此时风险资产的投资收益也随之递增, 意味着投资者倾向将更多资金投资于风险资产。由参数 σ 所代表的经济含义及图 1 (b) 可知, 当参数 σ 增大时, 由于风险资产的波动率引起风险资产的风险增大, 投资者会更加谨慎, 将减少投资在风险资产上的财富比例, 以此来规避风险。

接下来, 我们分析参数 $\mu - r$ 、 $1 - \gamma$ 和波动率 σ 对风险资产的最优投资策略 π^* 的影响。对 (23) 式中 $\mu(t)$ 求偏导得:

$$\frac{\partial \pi^*(t)}{\partial \mu(t)} = \frac{x - b(t)}{\sigma^2(t)(1 - \gamma)x} > 0 \quad (25)$$

(25) 式表明投资策略关于 $\mu(t)$ 单调递增。如图 2 所示, 市场收益越高 ($\mu - r$ 越大), 投资者越倾向于投资, 则会增加投资在风险资产上的财富比例, 这与我们的直观看法是一致的。图 2 (a) 表明风险厌恶程度越低 ($1 - \gamma$ 越小) 的投资者更愿意将更多资金投资于风险资产。同样, 市场的波动大小也会影响投资决策。如图 2 (b) 所示, 在市场收益相同的情况下, 风险资产上的投资金额会随着市场波动的变大呈递减趋势。

最后, 我们分析 α 、投资期限 T 和初始财富 x 对最优投资策略 π^* 的影响。图 3 表示初始财富 $x = 1$ 和 $x = 200$ 的情况下, 而且投资期限 $T = 10, 15, 20$ 时, 我们发现市场向良性状态发展, 则投资在风险资产上的财富比例会增加。当初始财富较小时, 从图 3 (a) 可看出, 投资者越临近退休 (T 越小), 则会逐渐减少在风险资产上的投资比例。当初始财富较大时, 如图 3 (b) 所示, 尽管投资期限取不同值, 但是最优投资策略 π^* 的三条曲线几乎重合在一起; 这表示在市场状态良好下, 当初始财富足够大时, 投资在风险资产上的财富比例几乎与投资期限无关。

图2 随着 $\mu - r$ 的变化, 参数 γ 和 σ 对最优投资策略 π^* 的影响Fig. 2 The impact of $\mu - r$, γ and σ on the optimal investment strategy π^* 图3 随着 α 的变化, x 和 T 对最优投资策略 π^* 的影响Fig. 3 The impact of α , x and T on the optimal investment strategy π^*

3 结 语

本文基于仿射平方根随机模型下, 研究了DC型养老金计划的最优投资策略。利用随机控制方法和求解相应的HJB方程, 得到CRRA效用函数下的最优投资策略及最优值函数的解析解。最后我们分析了不同参数对最优策略的影响。特别地, 以风险资产的风险源和风险的市场的价格的风险源无关为例, 研究发现: 随机因子和漂移率对最优投资策略产生积极的影响, 其影响程度与风险资产的波动率、相对风险厌恶系数和初始财富有关; 而且当市场状态往良性发展时, 若初始财富足够大, 则最优投资策略几乎不受投资期限的影响, 即初始财富足够大时, 无论考虑临近退休时刻与否, DC型养老金计划参与者投资在风险资产上的财富比例几乎保持不变。

参考文献:

- [1] VIGNA E, HABERMAN S. Optimal investment strategy for defined contribution pension schemes [J]. Insurance Mathematics and Economics, 2001, 28(2): 233-262.

- [2] HABERMAN S, VIGNA E. Optimal investment strategies and risk measures in defined contribution pension schemes [J]. Insurance Mathematics and Economics, 2002, 31(1): 35-69.
- [3] DEVOLDER P, PRINCEP M B, FABIAN I D. Stochastic optimal control of annuity contracts [J]. Insurance Mathematics and Economics, 2003, 33(2): 227-238.
- [4] GAO J W. Stochastic optimal control of DC pension funds [J]. Insurance Mathematics and Economics, 2008, 42(3): 1159-1164.
- [5] 张初兵, 荣喜民. 仿射利率模型下确定缴费型养老金的最优投资[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(5): 1048-1056.
ZHANG C B, RONG X M. Optimal investment for DC pension under the affine interest rate model [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2012, 32(5): 1048-1056.
- [6] 高建伟, 乌云高. 不确定理论下的DC型养老金的最优投资策略问题[J]. 数学的实践与认识, 2018, 48(4): 97-106.
GAO J W, WU Y G. Optimal portfolio strategy of a defined contribution pension plan under the uncertainty theory [J]. Mathematics in Practice and Theory, 2018, 48(4): 97-106.
- [7] HE L, LIANG Z X. Optimal investment strategy for the DC plan with the return of premiums clauses in a mean - variance framework [J]. Insurance Mathematics and Economics, 2013, 53(3): 643-649.
- [8] COX J C, ROSS S A. The valuation of options for alternative stochastic processes [J]. Journal of Financial Economics, 1976, 3(1): 145-166.
- [9] ZENG X D, TAKSAR M. A stochastic volatility model and optimal portfolio selection [J]. Quantitative Finance, 2013, 13(10): 1547-1558.
- [10] CHACKO G, VICEIRA L M. Dynamic consumption and portfolio choice with stochastic volatility in incomplete markets [J]. Review of Financial Studies, 2005, 18(4): 1369-1402.
- [11] NOH E J, KIM J H. An optimal portfolio model with stochastic volatility and stochastic interest rate [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 375(2): 510-522.
- [12] 林祥, 杨益非. Heston随机方差模型下确定缴费型养老金的最优投资[J]. 应用数学, 2010, 23(2): 413-418.
LIN X, YANG Y F. Optimal investment for defined contribution pension plans under Heston model [J]. Mathematica Applicata, 2010, 23(2): 413-418.
- [13] XIAO J W, YIN S H, QIN C L. Constant elasticity of variance model and analytical strategies for annuity contracts [J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2006, 27(11): 1499-1506.
- [14] GAO J W. Optimal portfolios for DC pension plans under a CEV model [J]. Insurance Mathematics and Economics, 2009, 44(3): 479-490.
- [15] 张初兵, 荣喜民, 侯如靖, 等. Heston模型下确定缴费型养老金的投资组合优化[J]. 系统工程, 2012, 30(12): 39-44.
ZHANG C B, RONG X M, HOU R J, et al. Investment portfolio optimization for defined-contribution pension under a Heston model [J]. Systems Engineering, 2012, 30(12): 39-44.
- [16] SHEN Y, ZENG Y. Optimal investment-reinsurance strategy for mean-variance insurers with square-root factor process [J]. Insurance Mathematics and Economics, 2015, 62: 118-137.
- [17] 谢树香, 李仲飞. 带负债的连续时间最优资产组合选择[J]. 系统科学与数学, 2007, 27(6): 801-810.
XIE S X, LI Z F. Continuous-time optimal portfolio selection with liability [J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2007, 27(6): 801-810.
- [18] 吴倩. 随机波动下的确定缴费型养老金投资问题[D]. 天津: 天津大学, 2014.
WU Q. Optimal investment for defined contribution plan pension under the stochastic volatility [D]. Tianjin: Tianjin University, 2014.

(责任编辑 冯兆永)